Vorwort *

Leonhard Euler

Was das Differentialkalkül und im Allgemeinen die Analysis des Unendlichen ist, kann denen, die noch überhaupt keine Kenntnis vor ihr haben, kaum erklärt werden und hier lässt sich auch nicht, wie es in anderen Disziplinen zu geschehen pflegt, der Anfang der Behandlung angenehm von einer Definition aus nehmen. Nicht weil von diesem Kalkül keine Definition gegeben ist, sondern weil ja, um sie zu verstehen, nicht nur im allgemeinen Leben, sondern auch in der Analysis des Unendlichen weniger gebräuchliche Kenntnisse solcher Art nötig sind, die erst bei der Behandlung des Differentialkalküls entwickelt und erklärt zu werden pflegen; dadurch geschieht es, dass seine Definition nicht vorher begriffen werden kann, bis seine Prinzipien schon hinreichend klar erkannt worden waren.
Zuerst kreist also dieses Kalkül um variable Größen; auch wenn nämlich jede Größe in ihrer Natur ins Unendliche vermehrt oder vermindert werden kann, werden dennoch, während das Kalkül nur auf ein gewisses Unternehmen gerichtet ist, die einen Größen durchgehend dieselbe Größe beizubehalten, die anderen hingegen durch alle Grade der Vermehrung und Verminderung hindurch variiert zu werden aufgefasst; um diese Unterscheidung anzumerken, pflegen jene Größen konstant, diese hingegen variabel genannt zu werden, so dass dieser Unterschied nicht so in der Natur der Sache wie in der natürlichen Beschaffenheit der Frage, auf welche dieses Kalkül bezogen wird, gelegen ist. Weil ja dieser Unterschied zwischen konstanten und variablen Größen an einem Beispiel besonders illustriert werden wird, werden wir den Flug aus einer Kanone mit der Kraft des Kanonenpulvers abgefeuerten Kugel betrachten, weil ja dieses Beispiel, um die Sache zu erklären, besonders geeignet

*Originaltitel: "Praefatio", erstmals publiziert im Jahre 1755", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 10, pp 3-9", Eneström-Nummer E212, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz" scheint. Hier tauchen also mehrere Größen auf, die bei dieser Untersuchung zu berücksichtigen sind. Zuerst natürlich die Menge des Kanonenpulvers; dann die Erhebung der Kanone über den Horizont; drittens die Weite des Fluges über der horizontalen Ebene, viertens die Zeit, in welcher die abgefeuerte Kugel sich in die Luft befindet; und wenn die Experimente nicht mit derselben Kanone durchgeführt werden, müsste darüber hinaus ihre Länge zusammen mit dem Gewicht der Kugel ins Kalkül gezogen werden. Aber wir wollen hier den Geist von der Varietät der Kanone und der Kugel lösen, damit wir nicht auf allzu verwickelte Fragen stoßen. Wenn daher also, nachdem ununterbrochen dieselbe Menge an Kanonenpulver beibehalten wurde, die Erhebung der Kanone immer wieder verändert wurde und die Weite des Fluges mit der Verweilzeit der Kugel in der Luft verlangt wird, wird bei dieser Frage die Menge des Pulvers oder die Kraft des Impulses eine konstante Größe sein; aber die Erhebung der Kanone mit der Weite des Fluges und seine Dauer wird zu den variablen Größen gerechnet werden müssen, weil wir ja für alle Erhebungsgrade diese Sachen bestimmen wollen, damit daher erkannt wird, wie große Veränderungen in der Weite und der Dauer des Fluges aus allen Variationen der Erhebung entstehen. Es wird aber eine andere Frage sein, wenn unter Beibehalt derselben Erhebung der Kanone die Menge des Kanonenpulvers ununterbrochen verändert wird und die Veränderungen, die sich daher auf die Flugbahn niederschlagen, bestimmt werden müssen, hier wird nämlich die Erhebung der Kanone eine konstante Größe sein, wohingegen die Menge des Kanonenpulvers und die Weite sowie die Dauer des Fluges variable Größen sein werden. So tritt es also klar zutage, auf welche Weise nach Verändern des Zustandes der Frage dieselbe Größe mal zu den konstanten mal zu variablen gezählt werden kann; zugleich wird aber daher eingesehen, dass bei dieser Aufgabe besonders darauf zu achten ist, wie die einen variablen Größen von den anderen so abhängen, dass nach Verändern von einer einzigen die übrigen notwendigerweise Veränderungen erfahren.

Im ersten Fall natürlich, im welchem die Menge des Kanonenpulvers dieselbe blieb, werden nach Verändern der Erhebung der Kanone auch die Weite und die Dauer des Fluges verändert und daher sind die Dauer und die Weite des Fluges variable von der Erhebung der Kanone abhängende und nach Verändern von dieser zugleich gewisse Veränderungen erfahrende Größen; im zweiten Fall hängen sie hingegen von der Menge des Pulvers ab, deren Veränderung in jenen gewisse Veränderungen hervorbringen muss.

Welche Größen aber auf diese Weise von den anderen abhängen, dass sie nach Verändern von diesen auch selbst Veränderung eingehen, die pflegen Funktionen von diesen genannt zu werden; diese Bezeichnung erstreckt sich sehr weit und umfasst alle Arten, auf die eine Größe durch andere bestimmt werden kann, in sich. Wenn also x eine variable Größe bezeichnet, werden alle Größen, die irgendwie von x abhängen oder durch sie bestimmt werden, Funktionen von selbigem genannt; von solcher Art sind sein Quadrat xx oder irgendwelche anderen Potenzen und auch aus diesen irgendwie zusammengesetzte Größen, ja sogar transzendente und im Allgemeinen, welche auch immer so von x abhängen, dass sie nach Vermindern oder Vermindern von x auch selbst Veränderungen erfahren. Daher ergibt sich schon die Frage, in welcher gesucht wird, wenn die Größe x um eine gegebene Größe entweder vermehrt oder vermindert wird, wie sehr daher eine jede Funktion von selbigen verändert werden oder einen wie großen Zuwachs oder eine wie große Abnahme sie erhält. In einfacheren Fällen wird diese Frage freilich leicht beantwortet; wenn nämlich die Größe x um die Größe ω vermehrt wird, wird ihr Quadrat daher den Zuwachs $2x\omega + \omega\omega$ erhalten und so wird sich der Zuwachs von x zum Zuwachs von xx verhalten wie ω zu $2x\omega + \omega\omega$, das heißt wie 1 zu $2x + \omega$; und in gleicher Weise pflegt in anderen Fällen aus Verhältnis des Zuwachses von x zum Zuwachs oder zur Abnahme, welchen eine gewisse Funktion von selbigem daher erhält, betrachtet zu werden. Es ist aber die Untersuchung dieses Verhältnisses von Zuwächsen dieser Art selbst nicht nur von größter Bedeutung, sondern auch es ist auch die ganze Analysis des Unendlichen auf sie gestützt. Damit dies klarer wird, wollen wir das obige Beispiel des Quadrates xx nehmen, dessen Zuwachs $2x\omega + \omega\omega$, welches es erhält, während die Größe x selbst um den Zuwachs ω vermehrt wird, wir oben gesehen haben, zu diesem in einem Verhältnis zu stehen wie $2x + \omega$ zu 1; daher ist es klar, umso kleiner der Zuwachs ω genommen wird, dass dieses Verhältnis umso näher an das Verhältnis von $2x$ zu 1 herankommt; und dennoch geht es nicht völlig in dieses Verhältnis über, bis jener Zuwachs völlig verschwindet. Daher sehen wir ein, wenn der Zuwachs ω jener variablen Größe x ins Nichts übergeht, dass dann auch der daher herstammende Zuwachs ihres Quadrates xx zwar verschwindet, aber dennoch zu diesem ein Verhältnis hat wie $2x$ zu 1; und was hier über das Quadrat gesagt worden ist, ist über alle anderen Funktionen von x zu verstehen, deren verschwindende Zuwächse, welche sie erhalten, während die Größe x selbst einen verschwindenden Zuwachs nimmt, natürlich dass sie zu diesem selbst ein festes und angebbares Verhältnis haben werden. Und auf diese Weise sind wir zur Definition des Differentialkalküls geführt worden, welches die

Methode ist, ein Verhältnis von verschwindenden Zuwächsen zu bestimmen, die gewisse Funktionen erhalten, während der variablen Größe, von welcher sie Funktionen und, ein verschwindender Zuwachs zugeteilt wird, und dass in dieser Definition die wahre Beschaffenheit des Differentialkalküls enthalten ist und daher geschöpft wird, wird auch denen, die sich mit in diesem Geschlecht der Mathematik nicht beschäftigen, leicht klar werden.
Das Differentialkalkül wird also nicht so vom Aufsuchen dieser verschwindenden Zuwächse selbst, die natürlich keine sind, wie vom Erforschen von deren gegenseitigem Verhältnis und gegenseitiger Proportion eingenommen; und weil die Verhältnisse mit endlichen Größen ausgedrückt werden, ist auch dieses Kalkül um endliche Größen zu kreisen anzusehen. Obwohl nämlich die Vorschriften, wie sie für gewöhnlich angegeben zu werden pflegen, an die Definition dieser verschwindenden Zuwächse angepasst worden zu sein scheinen, werden dennoch nie aus den absolut betrachteten, sondern eher immer aus deren Verhältnis Schlussfolgerungen abgeleitet. Auf die gleiche Weise ist aber die Natur des Integralkalküls beschaffen, welches am passendsten so definiert wird, dass es gesagt wird, die Methode zu sein, aus einem bekannten Verhältnis von verschwindenden Zuwächsen jene Funktionen selbst, von welchen sie die Zuwächse sind, zu finden.
Damit aber diese Verhältnisse leichter erschlossen und in einer Rechnung dargestellt werden können, pflegen diese verschwindenden Zuwächse selbst, auch wenn sie eigentlich keine sind, dennoch mit gewissen Zeichen bezeichnet zu werden; unter Verwendung von diesen steht selbstredend auch nichts im Wege, dass ihnen gewisse Namen gegeben werden. Sie werden deshalb Differentiale genannt, die, weil sie keine Größe haben, auch als unendlich kleine Größen bezeichnet werden, die also in ihrer Natur so zu deuten sind, dass sie für überhaupt keine oder gleich Null gehalten werden. So, wenn der Größe x der Zuwachs ω zugeteilt wird, dass sie in $x + \omega$ übergeht, wird ihr Quadrat xx in $xx + 2x\omega + \omega\omega$ übergehen und nimmt daher den Zuwachs $2x\omega + \omega\omega$; daher wird sich der Zuwachs von x, welcher ω ist, zum Zuwachs des Quadrates, welcher $2x\omega + \omega\omega$ ist, verhalten wie 1 zu $2x + \omega$; dieses Verhältnis geht erst dann in 1 zu $2x$ über, wenn ω verschwindet. Es werde also $\omega = 0$ und das Verhälnis dieser verschwindenden Zuwächse, allein welches im Differentialkalkül betrachtet wird, ist natürlich wie 1 zu $2x$; und dieses Verhältnis wäre umgekehrt nicht mit der Wahrheit verträglich, wenn auch jener Zuwachs ω in Wirklichkeit verschwände und vollkommen dem Nichts gleich werden würde. Wenn daher also dieses durch ω angezeigte Nichts den Zuwachs der Größe x bezeichnet, weil dieses sich zum Zuwachs der Quadrates xx wie 1 zu $2x$

verhält, wird der Zuwachs des Quadrates $xx = 2x\omega$ sein und daher auch dem Nichts gleich; daher steht zugleich fest, dass die Ähnlichkeit dieser Zuwächse nicht im Wege steht, dass deren Verhältnis, welches wie 1 zu $2x$ ist, bestimmt ist. Welches Nichts nun hier mit dem Buchstaben ω dargeboten wird, pflegt im Differentialkalkül, weil es wie der Zuwachs der Größe x angesehen wird, mit dem Zeichen dx dargestellt und ihr Differential genannt zu werden; und nachdem dx anstelle von ω gesetzt worden ist, wird das Differential von xx $2xdx$ sein. Auf die gleiche Weise wird gezeigt, dass das Differential des Kubus $x^3 = 3xxdx$ und im Allgemeinen einer jeden Potenz $x^n = nx^{n-1}dx$ sein wird. Welche anderen Funktionen von x also auch immer vorgelegt werden, im Differentialkalkül werden Regeln angegeben, deren Differentiale zu finden; aber immer ist dabei festzuhalten, weil diese Differentiale uneingeschränkt dem Nichts gleiche Größen sind, dass aus ihnen nichts anderes gefolgert werden kann als deren gegenseitige Verhältnisse, die natürlich auf endliche Größen zurückgeführt werden. Weil aber auf diese Weise, allein welche mit der Vernunft vereinbar sind, die Prinzipien des Differentialkalküls aufgestellt werden, stürzen alle Einwände, die gegen dieses Kalkül vorgebracht zu werden pflegten, von selbst ein; diese behielten jedoch die größte Gültigkeit bei, wenn die Differentiale oder unendlich kleinen Größen nicht gänzlich annihiliert werden würden.
Sehr vielen aber, die die Vorschriften des Differentialkalküls angegeben haben, schien es ratsam, die Differentiale vom absoluten Nichts abzusondern und eine eigene Ordnung von unendlich kleinen Größen, die nicht völlig verschwinden, sondern eine gewisse Größe, die freilich kleiner als jede angebbare wäre, beibehalten, festzulegen; diesen ist mit Recht entgegnet worden, dass die geometrische Strenge vernachlässigt wird und die daher abgeleiteten Schlussfolgerungen, deshalb weil diese unendlich kleinen Größen vernachlässigt werden würden, berechtigterweise suspekt sind; obgleich nämlich diese kleinen Größen unendlich klein aufgefasst werden, so wird weiter entgegnet, dass dennoch nicht nur durch Verwerfen von einzelnen, sondern auch mehrere und sogar unzähligen zugleich, schließlich daher ein enormer Fehler resultieren kann. Diesen Einwand versuchen sie unrichtig mit Beispielen solcher Art, in denen durch das Differentialkalkül dieselben Schlussfolgerungen wie durch die elementare Geometrie gefunden werden, abzuschmettern; denn wenn die unendlich kleinen Größen, die in der Rechnung vernachlässigt werden, nicht Nichts sind, muss daher notwendigerweise ein Fehler und eine umso größerer, um so mehr sie angehäuft werden, resultieren; und wenn dies nicht passiert, wäre die eher dem Mangel der Rechnung, in welcher

manchmal Fehler durch andere Fehler ausgeglichen werden, zuzuschreiben, als dass die Rechnung vom Verdacht eines Fehlers freizusprechen wäre. Wenn daher aber bei keinem Fehler eine Ausgleichung von dieser Art geschieht, wird mit solchen Beispielen auf glänzende Weise das selbst, was ich will, dargetan: Die, die vernachlässigt worden sind, sind ganz und gar und uneingeschränkt für nichts zu halten und daher weichen die unendlich kleinen Größen, die im Differentialkalkül behandelt werden, nicht vom absoluten Nichts ab. Auch wird die Sache keineswegs geklärt, wann immer von einigen die unendlich kleinen Größen so beschrieben werden, dass sie als winzig kleine Staubkörnchen in Bezug auf einen gewaltigen Berg oder die ganze Erdkugel angesehen werden müssen; auch wenn nämlich dem, der es in Angriff genommen hat, die Größe der ganzen Erdkugel durch Rechnung zu bestimmen, der Fehler nicht nur eines einzigen, sondern mehrerer tausend Staubkörnchen leicht nachgesehen zu werden pflegt, schreckt dennoch die geometrische Strenge vor einem so kleinen Fehler zurück und dieser Einwand wäre allzu schwerwiegend, wenn jegliche Gültigkeit beibehielte. Des Weiteren ist es auch schwer zu sagen, was die daher zu gewinnen hoffen, die die unendlich kleinen Größen vom Nichts trennen wollen; sie fürchten aber, dass, wenn sie gänzlich verschwinden, auch deren Vergleich, zu welchem sie die ganze Aufgabe geführt zu werden meinen, beseitigt wird; wie nämlich uneingeschränkt dem Nichts gleiche Größen miteinander verglichen werden können, so sagen sie, kann sich auf keine Weise vorgestellt werden. Sie halten es also für notwendig, ihnen eine Größe zuzugestehen, damit sie irgendwas haben, wovon sie den Vergleich anstellen; dennoch sind sie gezwungen, diese so kleine Größe zuzulassen, dass sie, als wäre sie keine, angesehen werden und ohne Fehler in der Rechnung vernachlässigt werden kann. Und dennoch wagen sie nicht, selbiger eine gewisse und bestimmte Größe, wenn auch eine unerfassbar kleine, zuzuschreiben; immer nämlich, wenn sie zweimal oder dreimal so kleine annehmen würden, würden sich die Vergleiche auf dieselbe Weise verhalten. Daher ist es klar, dass die Größe selbst überhaupt nicht zum Anstellen des Vergleiches beiträgt und dieser daher nicht beseitigt wird, auch wenn jene Größe gänzlich verschwindet.

Aus dem oben Gesagten ist es offenbar, dass der Vergleich, der im Differentialkalkül betrachtet wird, nicht einmal Geltung haben kann, wenn nicht jene Zuwächse völlig verschwinden; denn der Zuwachs ω der Größe x, welchen wir im Allgemeinen durch ω angezeigt haben, verhält sich zum Zuwachs des Quadrates, welcher $2x\omega + \omega\omega$ ist, im einem Verhältnis wie 1 zu $2x + \omega$; dieser weicht immer vom Verhältnis 1 zu $2x$ ab, wenn nicht $\omega = 0$ ist; und

erst dann, wenn wir $\omega = 0$ zu sein festlegen, können wir wahrheitsgemäßversichern, dass dieses Verhältnis exakt wie 1 zu $2x$ wird. Dennoch wird indes erkannt, je geringer jener Zuwachs angenommen wird, dass umso näher an dieses Verhältnis herangekommen wird; daher ist nicht nur möglich, sondern entspricht auch der Natur Sache, diese Zuwächse zuerst wie endlich zu betrachten und sie auch in Figuren, wenn welche nötig sind, um die Sache zu illustrieren, endlich darzustellen; darauf werden aber diese Zuwächse in der Vorstellung ununterbrochen kleiner zu werden aufgefasst und deren Verhältnis sich ununterbrochen immer mehr einem gewissen Grenzwert anzunähern aufgefunden werden, welchen es aber erst dann erreicht, wenn sie gänzlich ins Nichts übergegangen sind. Aber dieser Grenzwert, der quasi das letzte Verhältnis jener Zuwächse festlegt, ist der wahre Gegenstand des Differentialkalküls; dessen erste Fundamente ist der gelegt zu haben anzusehen, welchem es zuerst in den Sinn gekommen ist, diese letzten Verhältnisse, an welche sich die Zuwächse der variablen Größen, während diese Zuwächse ununterbrochen immer mehr vermindert werden, annähern und erst dann, wenn sie verschwinden, erreichen, zu betrachten.
Spuren von dieser Betrachtung entdecken wir aber bei den ältesten Autoren, denen deshalb eine gewisse Idee und zumindest geringe Kenntnis der Analysis des Unendlichen nicht abgesprochen werden kann. Nach und nach hat darauf diese Wissenschaft größere Zuwächse genommen und ist nicht plötzlich zu der Höhe, in welcher sie nun wahrgenommen wird, erhoben worden, auch wenn freilich in ihr um Vieles mehr Dinge noch im Dunkeln liegen als ans Licht gebracht worden sind. Weil nämlich das Differentialkalkül auf Funktionen jeden Geschlechtes, wie auch immer sie zusammengesetzt sind, erstreckt wird, ist nicht mit einem Mal die Methode bekannt geworden, die verschwindenden Zuwächse von gänzlich allen Funktionen zu vergleichen, sondern allmählich ist dieses Finden zu immer komplizierteren Funktionen fortgeschritten. Was natütlich rationale Funktionen betrifft, hat das letzte Verhältnis, welches deren verschwindende Zuwächse zueinander haben, um Vieles früher als zu den Zeiten von Newton und Leibniz angegeben werden können, so dass das Differentialkalkül, sofern es allen auf rationale Funktionen angewendet wird, lange vor diesen Zeiten gefunden worden zu sein anzusehen ist. Dann besteht aber kein Zweifel, dass wir von Newton den Teil des Differentialkalküls, der um irrationale Funktionen kreist, erhalten zu haben ansehen müssen; zu diesem ist er mit seinem vorzüglichem Lehrsatz über die allgemeine Entwicklung der Potenzen des Binoms in glüklicher Weise geführt worden, mit welchem außergewöhnlichen Fund die Grenzen

des Differentialkalküls schon wunderbar erweitert worden waren. Leibniz sind wir aber nicht weniger zu Dank verpflichtet, weil er dieses zuvor nur wie ein einzigartiger Kunstgriff angesehenes Kalkül in die Form einer Disziplin gebracht hat und seine Vorschriften zu einem System zusammengefasst hat und klar erklärt hat. Daher wurden nämlich die größten Hilfsmittel darggereicht, um dieses Kalkül weiter zu entwickeln, und das, was noch vermisst wurde, aus sicheren Prinzipien zu finden. Bald sind also mit Eifer sowohl von Leibniz als auch der Bernoullis von da an die Grenzen des Differentialkalküls auch zu transzendenten Funktionen, welcher Teil noch unentwickelt war, vorwärts bewegt worden, dann aber auch die sichersten Fundamente des Integralkalküls festgelegt wurden; die darauf fußenden, die darauf folgend in diesem Geschlecht gearbeitet haben, haben dann ununterbrochen größere Zuwächse hinzugefügt. Newton hatte aber auch sehr weitreichende Beispiele für das Integralkalkül gegeben, dessen erster Fund, weil er vom ersten Ursprungsort des Differentialkalküls kaum getrennt werden kann, nicht so uneingeschränkt festgelegt werden kann; und weil noch ein sehr großer von selbigem zu entwickelnder Teil übrig ist, kann dieses Kalkül nicht einmal jetzt für uneingeschränkt gefunden gehalten werden, sondern wir müssen eher, wie viel nach Kräften zu seiner Vervollkommnung beizutragen gelungen ist, dankbar anerkennen. Und ich meine, dass diese Dinge über den Ruhm des Fundes dieses Kalküls festzuhalten sind, über welche Ehre freilich früher dermaßen gestritten worden ist.
Was aber die verschiedenen Namen, die diesem Kalkül von den Mathematikern der verschiedenen Nationen gegeben zu werden pflegen, betrifft, so gehen alle darauf zurück, dass sie mit der hier gegebenen Definition vortrefflich übereinstimmen; ob nämlich jene verschwindenden Zuwächse, deren Verhältis betrachtet wird, Differentiale oder Fluxionen genannt werden, sie sind immer dem Nichts gleich zu verstehen; darin muss der wahre Begriff der unendlich kleinen Größen festgelegt wurden. Daher werden in der Tat auch alle Dinge, die über die Differentiale zweiter und höheren Ordnung mehr eifrig als nützlich diskutiert worden sind, sehr klar gemacht werden, weil sie alle per se gleichermaßen verschwinden und sie niemals an sich, sondern eher deren gegenseitige Relation betrachtet zu werden pflegt. Weil nämlich das Verhältnis, welches die verschwindenden Zuwächse zweier Funktionen zueinander haben, wiederum durch eine gewisse Funktion ausgedrückt wird, wenn auch der verschwindende Zuwachs dieser Funktion mit anderen verglichen wird, so ist die Sache sich auf zweite Differentiale zu beziehen anzusehen; und so muss weiter das Fortschreiten zu Differentialen höherer Grade verstanden werden, so dass

immer in Wirklichkeit endliche Größen im Geiste bewahrt werden und die Zeichen der Differentiale nur, um sie angenehm darzustellen, verwendet werden. Auf den ersten Blick mag diese Beschreibung der Analysis des Unendlichen freilich den meisten schlüpfrig und allzu unfruchtbar erscheinen, auch wenn jene mysteriösen Gattungen des unendlichen Kleinen an sich nicht mehr versprechen; aber wenn wir die Verhältnisse, die zwischen den verschwindenden Zuwächsen von jeglichen Funktionen entstehen, richtig erkennen, ist diese Erkenntnis per se oftmals von größter Bedeutung, ist dann aber auch bei vielen und besonders schwierigen Untersuchungen so notwendig, dass ohne ihre Hilfe überhaupt nichts verstanden werden kann. Wie wenn beispielsweise die Frage über die Bewegung einer aus einer Kanone abgefeuerten Kugel gestellt wird und zugleich der Luftwiderstand berücksichtigt werden muss; so ist es dann auf keine Weise möglich, wie die Bewegung durch einen endlichen Raum hindurch sein wird, zu bestimmen, während so die Richtung des Weges, in welche die Kugel sich fortbewegt, wie die Geschwindigkeit, von welcher der Widerstand abhängt, zu jedem Moment verändert wird. Einen umso kleineren Raum, durch welchem die Bewegung geschieht, wir aber betrachten, umso kleiner wird jene Variabilität sein und umso leichter wird es möglich sein, zur Erkenntnis des Wahren zu gelangen. Wenn wir daher aber jenen Raum völlig verschwinden lassen, weil dann jede Ungleichheit so in der Richtung des Weges wie in der Geschwindigkeit beseitigt wird, wird es möglich sein, die Wirkung des Widerstandes durch die Bewegungsgesetze genau zu bestimmen und die zu seinem Zeitpunkt verursachte Änderung der Bewegung anzugeben. Nachdem aber diese momentanen Veränderungen oder eher, weil sie selbst kleine sind, deren gegenseitiges Verhältnis erkannt worden ist, haben wir schon sehr viel gewonnen; und es ist die Aufgabe des Integralkalküls, daraus die durch den endlichen Raum hindurch variierte Bewegung zu folgern. Ich glaube aber, dass es keineswegs nötig ist, vielen den Gebrauch des Differentialkalküls so wie der Analysis im Allgemeinen zu zeigen, weil nun freilich hinreichend ausfindig gemacht worden ist, wenn wir die leichtesten Untersuchungen, in welchen die Bewegung so von festen wie von flüssigen Körpern eingeht, genauer durchführen wollen, dass das nicht ohne die Analysis des Unendlichen geleistet werden kann, aber diese Wissenschaft selbst oft noch nicht hinreichend entwickelt ist, dass wir die Sache vollständig erklären können. Durch alle Teile der Mathematik hindurch hat sich der Gebrauch dieser höheren Analysis sogar bis dahin ausgebreitet, dass alle Dinge, die es noch ohne ihren Fund zu erledigen möglich gewesen war, für fast nichts zu halten sind.

Ich habe also beschlossen, in diesem Buch das ganze Differentialkalkül aus wahren Prinzipien zu derivieren und so umfassend zu behandeln, dass ich nichts von den Dingen auslasse, die sich dahin zu beziehen gefunden worden sind. Ich habe dieses Werk in zwei Teile geteilt, in deren erstem ich nach Legen der Fundamente des Differentialkalküls die Methode darstellen werde, Funktionen jeden Geschlechtes zu differenzieren und nicht nur die Differentiale erster Ordnung, sondern auch die der höheren Ordnungen zu finden, ob die Funktionen eine einzige Variable oder zwei oder mehrere involvieren. Im anderen Teil habe ich aber den sehr weitreichenden Gebrauch dieses Kalküls in der Analysis des Endlichen so wie in der Lehre der Reihen dargestellt. Über den Gebrauch dieses Kalküls in der Geometrie von gekrümmten Linien führe ich aber nichts an, was umso weniger vermisst werden wird, weil in anderen Werken dieser Teil so umfassend behandelt worden ist, dass sogar quasi die Prinzipien des Differentialkalküls aus der Geometrie entnommen worden sind und auf diese Wissenschaft, weil sie kaum hinreichend entwickelt war, mit größter Sorgfalt angewendet worden sind. Hier ist aber alles innerhalb der Grenzen der reinen Analysis enthalten, dass nicht einmal eine Figur nötig war, um alle Vorschriften dieses Kalküls zu erklären.